M 84

Concours des E.N.S.I. M 1978

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

1° L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et orienté par cette base. X et Y étant deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on note $(X . Y)$ leur produit scalaire.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ définie à partir de $\mathcal{B}_0$ par la matrice de passage A. Calculer, en fonction de A, la matrice g définissant le produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$, matrice dont on désignera les coefficients par g_{ij} : $g_{ij} = (e_i . e_j)$ (i et $j = 1, 2, 3$).

2° X étant un vecteur de $\mathbb{R}^3$, de composantes affines (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, on pose : $(X . e_j) = x_j^*$ ($j = 1, 2, 3$). Vérifier que la connaissance de x_1^*, x_2^*, x_3^*, appelés composantes covariantes de X dans $\mathcal{B}$, définit complètement ce vecteur. Donner les expressions des x_i en fonction des x_j^* et des coefficients γ_{ij} de la matrice $\gamma = g^{-1}$.

3° Exprimer le produit scalaire des vecteurs :

$$X = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{j=1}^{3} y_j e_j$$

a. en fonction des composantes covariantes de X et des composantes affines de Y.

b. en fonction des composantes affines de X et des composantes covariantes de Y.

4° Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que les composantes affines dans cette base de tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ soient égales aux composantes covariantes de ce même vecteur dans la base $\mathcal{B}$, et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^*$. Calculer les produits scalaires $(e_i . e_j^*)$. Exprimer les composantes covariantes $(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**})$ de X dans la base $\mathcal{B}^*$ en fonction de ses composantes affines (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

5° Soit $G_{\mathcal{B}}$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, les composantes affines (y_1, y_2, y_3) de $Y = G_{\mathcal{B}}(X)$ dans la base $\mathcal{B}$ soient respectivement égales aux composantes covariantes (x_1^*, x_2^*, x_3^*) de X dans cette base. Vérifier que $G_{\mathcal{B}}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, en donnant la matrice qui définit cet automorphisme dans la base $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ de bases de $\mathbb{R}^3$ telle que, dans toute base $\mathcal{B}'$ appartenant à la famille, la matrice qui définit $G_{\mathcal{B}}$ soit identique à la matrice g' qui définit le produit scalaire. Comment passe-t-on d'une base de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ à une autre? Étudier le cas particulier où $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$.

6° ω étant un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné, et P le plan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle admettant pour vecteur directeur ω, montrer que $G_{\mathcal{B}}(P)$ est un plan vectoriel orthogonal à une droite vectorielle dont on calculera un vecteur directeur.

.../...

II

1° Dans la suite du problème, on désignera par a_{ij} les coefficients de la matrice de passage A de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$:

$$e_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}\, \varepsilon_k .$$

Vérifier que si (i, j, k) et (p, q, r) sont deux permutations des entiers (1, 2, 3), et α_{rk} le cofacteur de a_{rk} dans la matrice A, on a :

$$a_{pi}a_{qj} - a_{pj}a_{qi} = \varepsilon\,(i, j, k)\,\varepsilon\,(p, q, r)\,\alpha_{rk}.$$

où $\varepsilon\,(i, j, k)$ et $\varepsilon\,(p, q, r)$ sont les signatures respectives des deux permutations.

2° X et Y étant deux vecteurs de composantes affines respectives (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) dans la base canonique $\mathcal{B}_0$, on désigne par V leur produit vectoriel $X \wedge Y$. Démontrer que, dans la base $\mathcal{B}$, les composantes covariantes (v_1^*, v_2^*, v_3^*) de V peuvent s'exprimer en fonction des composantes affines (x_1, x_2, x_3) de X et (y_1, y_2, y_3) de Y, sous la forme :

$$v_i^* = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon\,(j, k, l)\,(a_{1i}\alpha_{1i} + a_{2i}\alpha_{2i} + a_{3i}\alpha_{3i})\, x_j y_k$$

où (j, k, l) est l'image de (1, 2, 3) par la permutation σ telle que $\sigma(1) = j$ et $\sigma(2) = k$.

3° Montrer alors qu'il est possible de définir le produit vectoriel V de deux vecteurs X et Y *dans une base* $\mathcal{B}$ *quelconque* par les expressions de ses composantes covariantes en fonction des composantes affines de X et Y, grâce aux formules :

$$v_1^* = \sqrt{\det g}\,(x_2y_3 - x_3y_2)\,; \quad v_2^* = \sqrt{\det g}\,(x_3y_1 - x_1y_3)\,; \quad v_3^* = \sqrt{\det g}\,(x_1y_2 - x_2y_1)$$

où det g représente le déterminant de la matrice g définissant, dans la base $\mathcal{B}$, le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$.

4° Calculer, dans la base $\mathcal{B}$, les composantes affines v_1, v_2, v_3 de V en fonction des composantes covariantes (x_1^*, x_2^*, x_3^*) de X et (y_1^*, y_2^*, y_3^*) de Y.

5° Z étant un 3e vecteur de $\mathbb{R}^3$, déduire de l'étude de (V.Z) l'expression du produit mixte [X, Y, Z] :

a. en fonction des composantes affines de X, Y, Z dans la base $\mathcal{B}$;

b. en fonction des composantes covariantes de ces vecteurs dans la même base.

6° De l'étude, *dans la base* $\mathcal{B}$, du produit vectoriel $U = (X \wedge Y) \wedge Z$ déduire la relation :

$$(X \wedge Y) \wedge Z = (Z.X)\,Y - (Y.Z)\,X.$$

III

Dans la suite du problème, la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à laquelle est rapportée $\mathbb{R}^3$ est supposée orthonormée. ω est un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$, de composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dans $\mathcal{B}$, et dont la norme est égale à 1.

1° On pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$:

$$X \wedge \omega = \mathcal{T}(X).$$

Vérifier que l'application $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ainsi définie est un homomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont on écrira la matrice T dans la base $\mathcal{B}$.

.../...

2° Y étant l'image par $\mathcal{T}$ du vecteur $X \in \mathbb{R}^3$, calculer, sans utiliser la matrice T, les produits scalaires $(Y.X)$ et $(Y.\omega)$. En déduire que $\mathcal{T}$ a une valeur propre unique, réelle, que l'on précisera, et déterminer le sous-espace propre correspondant. Retrouver ces résultats en étudiant T.

3° Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{T}^n$ le composé de n homomorphismes égaux à $\mathcal{T}$. Démontrer, sans utiliser la matrice T, que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}^2(X)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{T}^2(X) = \alpha_1 \omega + \alpha_2 X$$

où α_1 et α_2 sont deux scalaires réels dont on donnera les valeurs. Vérifier que $\mathcal{T}^3 = k\mathcal{T}$, en précisant la valeur du scalaire k.

Retrouver ces résultats en calculant T^2 et T^3.

4° α désignant un réel donné, différent de 0, $\mathcal{V}_\alpha$ est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{V}_\alpha(X) = X + \alpha(X \wedge \omega).$$

Vérifier que $\mathcal{V}_\alpha$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont on exprimera la matrice V_α dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de α, T et de la matrice « unité » I.

Étudier les valeurs propres de $\mathcal{V}_\alpha$, et les sous-espaces propres correspondants. $\mathcal{V}_\alpha$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

5° Vérifier qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$V_\alpha^{-1} = aI + bT + cT^2,$$

et donner les expressions de a, b, c en fonction de α.

6° Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, il existe un vecteur Y de $\mathbb{R}^3$ et un seul tel que :

$$Y + \alpha(Y \wedge \omega) = X - \alpha(X \wedge \omega).$$

On pose $Y = \mathcal{M}_\alpha(X)$. Vérifier que l'application $\mathcal{M}_\alpha$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ainsi définie est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont on exprimera la matrice M_α dans la base $\mathcal{B}$, en fonction de I, T, T^2.

Posant $\theta = 2 \operatorname{Arc\,tg} \alpha$, calculer les coefficients de M_α en fonction de $\sin\theta$, $\cos\theta$ et des composantes ω_1, ω_2, ω_3 de ω dans la base $\mathcal{B}$.

7° Soit $\mathcal{B}'$ une nouvelle base orthonormée, dans laquelle $e_3' = \omega$. Écrire la matrice M_α' définissant $\mathcal{M}_\alpha$ dans $\mathcal{B}'$. En déduire une interprétation géométrique de $\mathcal{M}_\alpha$. Pouvait-on parvenir à cette interprétation sans faire intervenir le calcul matriciel?

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail